LA PUISSANCE D'UN NOMBRE NATUREL

I- Généralité :

Soit a un nombre non nul et n un entier naturel non nul. L'aire d'un carré de côté a est a^2 (on lit « a au carré », ou « *a* puissance 2 », ou « *a* exposant 2 »).

De même, le volume d'un cube d'arête a est a^3 (on lit « *a* au cube » ou « *a* puissance 3 » ou « *a* exposant 3 »)
.

Mais quel sens ont donc d'autres écritures telles que 7^5, $(-2)^7$ ou 5^{-3} ?

1- Définition :

Si $n \geq 2$, alors a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $a^n = \underbrace{a \text{ x} \ldots \text{ x } a}_{a \text{ est écrit } n \text{ fois}}$.

Si $n = 1$, alors $a^1 = a$.

De plus, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Enfin, par convention, si a ‡ 0 on pose $a^0 = 1$. Donc « 0^0 » n'est pas défini.

Vocabulaire :

— a^n et a^{-n} s'appellent des **puissances** de a.
— n (ou $-n$) s'appelle l'**exposant**.
— Pour a^n, on lit « a à la puissance n » ou « *a* exposant *n* ».

— 10^7 se lit « 10 à la puissance 7 », mais $\left(\dfrac{3}{7}\right)^5$ se lit « 3 sur 7, le tout à la puissance 5 ».

Exemples :

$3^5 = \underbrace{3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3}_{3 \text{ est écrit 5 fois}} = 243.$

$(-2)^7 = (2-) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

--- $= 128$.

-2 est écrit 7 fois

$5^{-3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{75} = 0{,}008$.

Remarque:

Pour calculer, avec une calculatrice, une puissance d'un nombre, on utilise la touche **y^x** (ou **x^y** ou **∧** ou **↑**). Ainsi, pour calculer $2{,}3^4$, on tape la séquence : 2, 3 y^x 4 **=**, ce qui donne : 27,984 1.

2- Propriétés :

a et b étant des nombres relatifs non nuls, n et p étant des entiers relatifs, on a :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$; $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$;

$a^n \times b^n = (ab)^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

$(a^n)^p = a^{n\,p}$.

Examples:

$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11} = 177\,147$

$\frac{-5^3}{-5^5} = (-5)^{3-5} = (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$.

$2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

$(4^2)^{-3} = 4^{2 \times (-3)} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4\,096} = 0{,}000\,244$.

EXERCICE :

Écrire un nombre sous forme d'une puissance

Considérons le nombre A égal à $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.
Il y a 6 facteurs tous égaux à 3, donc $A = 3^6$.

De même, si $B = \dfrac{1}{7} \times \dfrac{1}{7} \times \dfrac{1}{7} \times \dfrac{1}{7} \times \dfrac{1}{7}$, alors $B = \left(\dfrac{1}{7}\right)^5 = \dfrac{1}{7^5} = 7^{-5}$.

Enfin, si $C = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7$, alors :
$C = (-3)^4 \times 0{,}7^4$
$C = ((-3) \times 0{,}7)^4$
$C = (-2{,}1)^4$

Remarque : dans l'écriture de C, il y a quatre facteurs négatifs et par conséquent, le résultat est positif. On a donc également : $C = 2{,}1^4$.

Cette remarque se généralise. Soit a un nombre strictement négatif et n un entier relatif :

— si n est pair alors a^n est positif ;
— si n est impair alors a^n est négatif.

Utiliser des puissances de 10

Voici une conséquence de la définition de la puissance d'un nombre non nul.
Soit n un entier strictement positif.

10^n s'écrit : 1 suivi de n chiffres 0.

10^{-n} s'écrit : 0,.....1 avec n chiffres 0 au total (dont $n - 1$ zéros après la virgule).

Exemples :

$10^3 = 1\ 000$ (trois zéros) ; $10^6 = 1\ 000\ 000$ (six zéros).
$10^{-2} = 0{,}01$ (deux zéros) ; $10^{-6} = 0{,}000\ 001$ (six zéros).

Bien sûr, $10^0 = 1$.

Ceci permet d'écrire les nombres décimaux en écriture scientifique.

Exemples :

$1\ 500\ 000 = 1{,}5 \times 1\ 000\ 000 = 1{,}5 \times 10^6$
$0{,}000\ 000\ 054\ 7 = 5{,}47 \times 0{,}000\ 000\ 01 = 5{,}47 \times 10^{-8}$

3- Calcul :

On retrouve des puissances dans de très nombreuses formules de mathématiques ou de physique.

Par exemple, le volume d'une boule est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$, où R désigne le rayon.

Comment utiliser la définition et les propriétés des puissances pour les calculer ?

- **Utiliser la définition des puissances :**

On veut calculer les nombres A, B, C, D, E, F, G, H et I suivants :
$A = 1{,}1^3 = 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}331$.
$B = (-0{,}2)^5 = (-0{,}2) \times (-0{,}2) \times (-0{,}2) \times (-0{,}2) \times (-0{,}2) = -0{,}000\ 32$, car le nombre $-0{,}2$ est négatif et l'exposant, 5, est impair.

$C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$. On peut aussi écrire : $C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

$D = 1\ 789^0 = 1$, car tout nombre non nul élevé à la puissance 0 donne 1 (mais $0^{1\ 789} = 0$).

$E = (-2\ 001)^1 = -2001$.

$F = (-1)^{2\ 001} = -1$, car il y a un nombre impair de facteurs tous égaux à -1.

$G = (-1)^{3\ 000} = 1$, car il y a un nombre pair de facteurs tous égaux à -1.

$H = -2^8 = -128$. En effet, l'écriture -2^8 est équivalente à l'écriture $-(2^8)$.

- **Appliquer les propriétés des puissances :**

Dans ce paragraphe, a et b désignent des nombres non nuls, n et p des entiers relatifs.

On veut écrire sous la forme d'une puissance les nombres A, B, C, D et E suivants :

$A = (-7)^3 \times 5^3 = (-7 \times 5)^3 = (-35)^3$

On a utilisé la propriété : $a^n \times b^n = (ab)^n$.

$B = (-0,7)^7 \times (-0,7)^4 = (-0,7)^{7+4} = (-0,7)^{11}$

On a utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

$C = 4^3 \times 4^{-9} = 4^{3-9} = 4^{-6}$

On a ici aussi utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$. En effet, $3 + (-9) = 3 - 9 = -6$.
$D = (2,3^5)^3 = 2,3^{5 \times 3} = 2,3^{15}$

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$D = (2,3^5)^3 = 2,3^5 \text{ x } 3 = 2,3^{15}$.

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$$E = \frac{4^2}{4^7} = 4^{2-7} = 4^{-5}.$$

On a utilisé la propriété : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

Remarque : attention, il n'existe pas de formules concernant la somme des puissances !
Ainsi : $G = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ (alors que $3 + 5 = 8$ et $8^2 = 64$), car les puissances ont priorité sur les additions.

Les calculs de puissances ou de racines carrées peuvent être fastidieux si on ne dispose pas d'une calculatrice.

- **Comment les faire avec une calculatrice ?**

- **Utilisation de la machine :**

La plupart des calculatrices possèdent une touche « carré » : $\mathbf{x^2}$.

Exemple : pour calculer l'aire d'un carré de côté 3,7 m, il suffit de saisir la séquence : 3, 7 x^2.

L'affichage indique : 13,69. L'aire de ce carré est donc 13,69 m².

Remarque : sur certaines calculatrices, il faut appuyer sur la touche **EXE** pour que le calcul soit exécuté.

- **Calculer une puissance :**

Pour calculer un cube (si la calculatrice ne possède pas la touche « cube » : $\mathbf{x^3}$) ou une puissance quelconque, on peut utiliser la touche « puissance » dont le symbole sur le clavier de la calculatrice

est : $\mathbf{Y^x}$ ou $\mathbf{X^y}$ ou **^** ou ↑.

Exemple 1 : on veut calculer le nombre $A = 57^3$.

On tape la séquence : 5 7 y^x 3 = (ou : 5 7 y^x 3 EXE).

L'affichage indique : 185193

Remarque : suivant les modèles, c'est la touche **=** ou la touche **EXE** qui donne l'ordre d'effectuer les calculs.
Exemple 2 : on veut calculer le nombre $B = (-2{,}4)^4$.

On tape la séquence : 2 , 4 **+/-** Y^x 4 **=**

L'affichage indique : **33,1776**

On pouvait prévoir que le résultat serait positif, puisque l'exposant est pair, et ne pas utiliser la touche **+/-**.

Exemple 3 : on veut calculer le nombre $C = 0{,}4^{-7}$.

On tape la séquence : 0, 4 Y^x 7 **+/- =**

L'affichage indique : **97,65625**

Exemple 4 : on veut calculer le nombre ***D* = 17**^{23}.On tape la séquence : 1 7 **y**^{x} 2 3 **=**

L'affichage indique : 1,99675689 ^{28}

Cet affichage signifie : $1{,}996\ 756\ 89 \times 10^{28}$.

Remarque : lorsque le nombre est trop grand par rapport à l'écran d'affichage, la calculatrice passe automatiquement en mode scientifique.

On constate que certaines décimales sont alors perdues (sauf sur des calculatrices très performantes travaillant en mode exact).